//Distance Learning// //Обозначения R.I.P// 18/03

Лекция 11. Проекция точки на множество в гильбертовом пр-ве H, ее свойства

1) Основные понятия и свойства

В дальнейшем, при описании и исследовании некот. методов минимизации нам потреб-ся понятие т. на мн-во

Опр.1 ∃ U – некот. мн-во из гильб. пр-ва H. Точка $w \in U$ наз-ся **проекцией т. $u \in H$ на мн-во** U, if $\|w-u\|_H = \inf\limits_{v \in U} \|v-u\|_H = \rho(u, U)$

Т.о., w – ближайшая к u т. из мн-ва U. В дальнейшем проекцию т. на мн-во будем обозн. $w \in P_U(u)$

Отметим, что if $u \in U$, то $P_U(u) = u$, т.е. оп-р проектирования на U явл-ся единичным. If же $u \notin U$, то проекция т. u на мн-во U может и ¬∃ (например, когда U – открыт. мн-во), кроме того, она м.б. не !

Далее ∄ основные св-ва проектир-ния

Т1 ∃ U – вып., замкн. Тогда: 1) проекция т. u на мн-во U ∃ и !;

(хар. св-во проекции) → 2) $w = P_U(u) \Leftrightarrow \langle w-u, v-w \rangle \geq 0, \ \forall v \in U$

▲ 1) Возьмем произвол. $u \in H$, далее составим ф-цию $g(v) = \|v-u\|_H^2$. Такая ф-ция явл-ся сил. вып. по перем-й v (доказывали ранее) на вып. замкн. мн-ве U, $J(u)$ – непр. в норме $\|\cdot\|_H \Rightarrow$ {T Вейерштр. д/ сил. вып. ф-ций} $\Rightarrow \exists$, притом !, $w \in U$: $g(w) = \inf\limits_{v \in U} g(v) \Leftrightarrow \|w-u\|_H^2 \leq \|v-u\|_H^2$, $\forall v \in U \Rightarrow$
$\Rightarrow \|w-u\|_H \leq \|v-u\|_H$, $\forall v \in U \Rightarrow$ {опр-ние} $\Rightarrow w \in P_U(u)$.

2) Согласно T III.5 (критерий опт-ти в форме ВН) $\Rightarrow$ $\langle g'(w), v-w \rangle \geq 0$, $\forall v \in U$, а т.к. $g'(v) = 2(v-u) \Rightarrow$ получим хар. св-во проекции ■

T_2] U – вып. замкн. мн-во из H. Тогда $\|P_U(u) - P_U(v)\|_H \leq \|u-v\|_H$, $\forall u, v \in H$ (1) // Оп-р проект-ния явл-ся нерастягивающим; оп-р в общ. случае не явл-ся сжимающим //

▲ Возьмем произвол. т. $u, v \in H$. Отметим, что $P_U(u)$, $P_U(v) \in U \Rightarrow$ {хар. св-во проекции} $\Rightarrow \langle P_U(u)-u, P_U(v)-P_U(u) \rangle \geq 0$,
$\langle P_U(v)-v, P_U(u)-P_U(v) \rangle \geq 0$

Сложим получ. нер-ва: $\langle P_U(u)-u-P_U(v)+v, P_U(v)-P_U(u) \rangle \geq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \underline{\|P_U(u)-P_U(v)\|_H^2} \leq \langle P_U(u)-P_U(v), u-v \rangle \leq \underline{\|P_U(u)-P_U(v)\|_H \cdot}$
$\underline{\|u-v\|_H}$

Разделим получ. нер-во на $\|P_U(u)-P_U(v)\|_H > 0 \Rightarrow$ получим требуемое нер-во (1). Отметим, что if $\|P_U(u)-P_U(v)\|_H = 0$, то нер-во (1) справедливо ■

Используя понятие проекции т. на мн-во, известный нам кр-й опт-ти в форме ВН д/ зад. опт-ции можно записать в альтернатив. проекц-й форме.

T_3 (Кр-й опт-ти в проекц-й форме)] U – вып. замкн. мн-во из гильб. пр-ва H, $J(u) \in C^1(U)$, $J(u)$ вып. на U, $J_* > -\infty$, $U_* \neq \emptyset$. Тогда $u_* \in U_* \Leftrightarrow u_* = P_U(u_* - \alpha J'(u_*))$, $\forall \alpha > 0$ (2)

▲ Согласно кр-ю опт-ти в вариац. форме $u_* \in U_* \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \langle J'(u_*), u-u_*\rangle \geq 0, \forall u \in U$. Домножим данное нер-во на произвол. $\alpha>0$, а также добавим и вычтем из лев. части ск. пр. $u_* \Rightarrow$
$\Rightarrow \langle u_* - (u_* - \alpha J'(u_*)), u-u_*\rangle \geq 0, \forall u \in U, \forall \alpha>0$, if сравнить это соотнош-е с хар. св-вом проекции, то получим соотнош. (2) ■

Заметим, что if ф-ция $J(u)$ не вып., то усл. (2) будет только необх. (аналогично кр-ю оп-ти в форме ВН).

Отметим, что данный факт нам существенно потреб-ся далее при изложении метода проекции градиента.

2) Примеры

Т.о., д/опр-ния проекции т. на мн-во необх. решить зад. минимизации квадратич. функц-ла (зад. квадратич. программирования): $g(v) = \|v-u\|_H^2 \to \inf, v \in U$

Это, конечно же, не всегда простая зад. Однако д/некот. мн-в она реш-ся явно. Приведем примеры таких мн-в и проекций на эти мн-ва.

1. If $U = \{v \in H : \|v\|_H \leq R\}$ — шар $\Rightarrow w = P_U(u) = \begin{cases} u, & \|u\| \leq R, \\ \frac{uR}{\|u\|}, & \|u\|>R \end{cases}$ (3)

Д/того, чтобы убедиться в справедливости ф-лы (3), восп-ся хар. св-вом проекции из Т1: $\langle w-u, v-w\rangle = \langle \frac{uR}{\|u\|} - u, v - \frac{uR}{\|u\|}\rangle =$

$= \left(\frac{R}{\|u\|} - 1\right)\langle u, v - \frac{uR}{\|u\|}\rangle = \frac{R-\|u\|}{\|u\|}\left(\langle u,v\rangle - \langle u,u\rangle\frac{R}{\|u\|}\right) = \frac{R-\|u\|}{\|u\|}(\langle u,v\rangle - \|u\|R) \geq$

$\geq \{$нер-во К-Б, $\|u\|>R\} \geq 0, \forall v \in U$

2. If $U = \{v \in H : \langle c, v\rangle = \gamma\}$ — гиперпл-ть с норм. в-ром $c \neq \theta_H$, $\gamma = const \Rightarrow w = P_U(u) = u + \alpha c, \quad \alpha = (\gamma - \langle c,u\rangle)/\|c\|^2$ (4)

Д/ того, чтобы убед-ся в справед-ти ф-лы (4), восп-ся хар. св-вом проекции из Т1 $\Rightarrow \langle w-u, v-w\rangle = \langle \alpha c, v-u-\alpha c\rangle =$
$= \alpha\langle c, v\rangle - \alpha\langle c, u\rangle - \alpha^2\|c\|^2 = \alpha(\gamma - \langle c,u\rangle - \alpha\|c\|^2) = \alpha(\gamma -$
$- \langle c,u\rangle - \frac{\gamma - \langle c,u\rangle}{\|c\|^2}\|c\|^2) = \alpha\cdot 0 = 0, \ \forall v\in U$

3. If $U = \{v = (v^1, \ldots, v^n) \in H = E^n : \alpha^i \le v^i \le \beta^i, i=\overline{1,n}\}$ – n-мерный ||пипед, $\alpha^i, \beta^i, i=\overline{1,n}$, – заданные величины $\Rightarrow w = \mathcal{P}_U(u)$: $w^i = \begin{cases} \alpha^i, & u^i < \alpha^i, \\ u^i, & \alpha^i \le u^i \le \beta^i; \\ \beta^i, & u^i > \beta^i \end{cases}$ (5)

4. If $U = \{v = v(t) \in L_2^r(t_0, T) : \alpha^i(t) \overset{п.в.}{\le} v^i(t) \overset{п.в.}{\le} \beta^i(t), i=\overline{1,r}\}$ – бесконечномер. ||пипед; $\alpha(t), \beta(t)$ – задан. ф-ции из класса $L_2^r(t_0, T) \Rightarrow w = w(t) = \mathcal{P}_U(u) = (w^1(t), \ldots, w^r(t))$: $w^i(t) =$
$= \begin{cases} \alpha^i(t), & u^i(t) < \alpha^i(t), \\ u^i(t), & \alpha^i(t) \le u^i(t) \le \beta^i(t), \\ \beta^i(t), & u^i(t) > \beta^i(t). \end{cases}$

Д/З

11.1 Вычислить $\mathcal{P}_U(u)$ на шар $U = \{v \in H : \|v - u_0\|_H \leqslant R\}$ (u_0 – центр шара).

11.2 Вычислить $\mathcal{P}_U(u)$ на полупространство $U = \{v \in H : \langle c, v\rangle \leqslant \gamma\}$, $c \ne 0$.

11.3 В пространстве E^4 найдите проекцию начала координат на множество

$$X = \{x \in E^4 : x_1 + 2x_2 - x_4 = 9,\ x_1 + 2x_3 + x_4 = 6\}$$

11.4 В пространстве ℓ_2 найти расстояние от точки $y = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\right)$ до множества

$$M = \left\{x \in \ell_2 : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k} = 0\right\}.$$

11.5 В пространстве $L_2[0,1]$ найти расстояние от точки $g(t) = 2\sin \pi t$ до множества

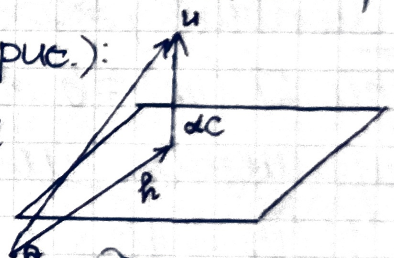
$$M = \left\{f(t) \in L_2[0,1] : \int_0^1 tf(t)dt = 0\right\}.$$

Приложение

Проиллюстрируем вывод ф-лы д/проекции на гиперпл-ть на след. примере:

В пр-ве $L_2[0,\frac{\pi}{2}]$ найти расстояние от т. $g(t)=t\cos t$ до мн-ва $M=\{f(t)\in L_2[0,\frac{\pi}{2}]: \int_0^{\pi/2} 4\sin t\, f(t)dt$

Решение Заметим, что в зад. треб-ся в гильб. пр-ве H найти расст. от некот. т. u до мн-ва M, д представляет собой гипер-пл-ть, т.е. $M=\{x\in H: \langle c,x\rangle=0\}$, где c — фикс. эл-т гильб. пр-ва H. Тогда имеет место след. соотнош-е (см. рис.):



$h=u-\alpha c$ (6), где h — проекция точки u на мн-во M, c — в-р нормали гиперпл-ти, α — некот. число. Далее, т.к. $h\in M \Rightarrow \langle c,h\rangle=0$ (7). Откуда с учетом (6) имеем $\alpha=\frac{\langle c,u\rangle}{\|c\|^2}$ (8). Т.о, проекция т. u на мн-во M равна $h=u-\frac{\langle c,u\rangle}{\|c\|^2}c$ (9), а расст. от т. u до мн-ва M равно $\|\alpha c\|=\frac{|\langle c,u\rangle|}{\|c\|}$ (10)

Из усл $\Rightarrow c=4\sin t,\ u=t\cos t$

$\|c\|^2=\int_0^{\pi/2}(4\sin t)^2dt=\int_0^{\pi/2}8(1-\cos 2t)2dt=4\pi$

$\langle c,u\rangle=\int_0^{\pi/2} t\cos t\cdot 4\sin t\,dt=\int_0^{\pi/2}2t\sin 2t=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}2t\,d\cos 2t=\frac{\pi}{2}$

И расст. от т. до мн-ва $\|\alpha c\|=\frac{\langle c,u\rangle}{\|c\|}=\frac{\sqrt{\pi}}{4}$